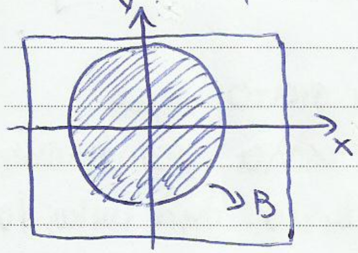
Ορισμός: Ένα μη κενό και φραγμένο $B \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται Jordan μετρήσιμο αν η $f \equiv 1 : B \to \mathbb{R}$ (δηλ. $f(x)=1,\ \forall x \in B$) είναι ολοκληρώσιμη. Τότε, το ολοκλήρωμα $\int_B 1 = V(B)$ ονομάζεται περιεχόμενο του B.

και αν $n=3$ το $\int_B 1 = V(B)$ ονομάζεται όγκος

και αν $n=2$ το $\int_B 1 = V(B)$ ονομάζεται εμβαδό

και αν $n=1$ το $\int_B 1 = V(B)$ ονομάζεται μήκος

Παρατήρηση/παράδειγμα:
Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ (μοναδιαίος κλειστός κυκλικός δίσκος), τότε (αν μπορώ να το υπολογίσω) το εμβαδό του B, είναι $V(B) = \int_B 1 \, d(x,y) = \int_B 1$



Επίσης, όπως θα δούμε το ολοκλήρωμα $\int_B 1$ θα μας δίνει και τον όγκο του συνόλου $\tilde{B} = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) : (x,y) \in B \\ 0 \leq z \leq 1 \end{array} \right\}$

όπου, σωστό είναι να πούμε ότι

$$\int_B 1 \, d(x,y) = V(\tilde{B}) = \int_{\tilde{B}} 1 \, d(x,y,z)$$

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς ένα $B \subseteq \mathbb{R}^n$ με $B \neq \emptyset$, με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, A κλειστό ορθογώνιο είναι Jordan-μετρήσιμο αν-ν η χαρακτηριστική συνάρτηση του B $(\chi_B(x))$:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases} \quad \text{όπου} \quad \chi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Είναι ολοκληρώσιμη στο A.
Τότε θα ισχύει: $V(B) = \int_B 1 = \int_A \chi_B$.

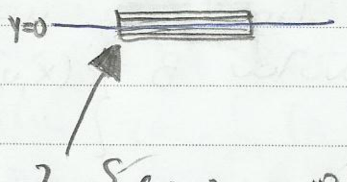
Πρόταση: Ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, είναι Jordan μετρήσιμο αν-ν το σύνορο του έχει μηδενικό περιεχ. (η απόδειξη με κρ. του Lebesgue)

Πχ
Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, μια βάση εμβαδού α και ύψος (κάθετο στον $\mathbb{R}^2$) 1 και όγκο β.
Ποιο είναι το εμβαδό της βάσης;
Απ: Παρατηρώ ότι το εμβαδό α, είναι ίσο με τον όγκο β αφού πολύ απλά το ύψος μας είναι ίσο με 1.

Συμπεράσματα (που προκύπτουν από τον ορισμό πάνω σε Jordan-μετρήσιμα $B \subset \mathbb{R}^n$, μέσω του ορισμού πάνω από κλειστά ορθογώνια)

[Ορίζουμε ολοκλήρωμα της $f : B \to \mathbb{R} \Leftrightarrow$ το $B \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι Jordan-μετρήσιμο.]

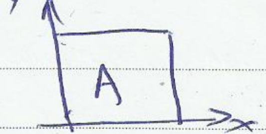
στον $\mathbb{R}^2$



← Έχει δισδιάστατο μηδ. περιεχόμενο αλλά μονοδιάστατο μηδ. περιεχόμενο δηλ. μηδενικό

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$:



το ελάχιστο ορθογώνιο

$A=[a,\beta]\times[a',\beta']$ το οποίο είναι φραγμένο

και το A Jordan μετρήσιμο γιατί γράφεται

ως άθροισμα τμημάτων άρα μηδενικό περιεχόμενο